Übungsblatt 4 für den 24.06.2009
"Mathematik II für Studierende der Chemie"
SS 2009

Prof. Dr. Guido Germano

Extremwerte von Funktionen mehrerer reellen Veränderlichen

1. Notwendige Bedingung, damit ein Punkt $\mathbf{x}_0$ im *Inneren* des Definitionsbereichs einer *stetig differenzierbaren* Funktion ein Extremwert ist: der Gradient ist in dem Punkt Null, also $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{x}_0) \equiv \partial f(\mathbf{x}_0)/\partial \mathbf{x} = \mathbf{0}$; $\mathbf{x}_0$ heißt dann kritischer Punkt.

   Hinreichende Bedingung, damit ein kritischer Punkt $\mathbf{x}_0$ im Inneren des Definitionsbereichs einer *zweimal stetig differenzierbaren* Funktion ein lokales Minimum bzw. Maximum ist: die Hesse-Matrix ist in dem Punkt positiv bzw. negativ definit, d.h. alle ihre Eigenwerte sind positiv bzw. negativ. Hinreichende Bedingung, damit ein solcher kritischer Punkt ein Sattelpunkt ist: die Hesse-Matrix ist in dem Punkt indefinit, d.h. sie hat sowohl positive wie negative Eigenwerte.

   Hauptminoren-Kriterium von Hurwitz: Eine 2×2 Matrix ist definit, wenn ihre Determinante > 0 ist, und zwar positiv definit, wenn $f_{xx} > 0$, bzw. negativ definit, wenn $f_{xx} < 0$; sie ist indefinit, wenn ihre Determinante < 0 ist. Eine $n \times n$ Matrix ist positiv definit, wenn die Determinanten der Hauptminoren alle positiv sind, negativ definit, wenn sie angefangen mit negativ alternierend sind, und indefinit sonst.

   Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix der folgenden Funktionen:

   $$\begin{array}{ll} \text{(a)} & f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2 \\ \text{(b)} & f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2y^2+1}} \\ \text{(c)} & f(x,y) = x^2 - xy + y^3. \end{array}$$

   Finden Sie die Maxima bzw. Minima; benutzen Sie dazu sowohl die Eigenwerte der Hesse-Matrix wie das Hurwitz-Kriterium. Finden Sie außerdem die Eigenvektoren der Hesse-Matrix im jeweiligen kritischen Punkt. Nimmt die Funktion entlang der Eigenvektoren ab oder zu?

2. Die Hesse-Matrix der Funktion (a) der vorigen Aufgabe ist konstant. Daher sind alle Ableitungen mit Ordnung > 3 gleich Null, und der Fehler einer Taylorentwicklung 2. Ordnung ebenfalls gleich Null. Stellen Sie dies fest, indem Sie die Taylorentwicklung 2. Ordnung dieser Funktion um einen beliebigen Anfangspunkt (x_0, y_0) schreiben: x_0, y_0 kürzen sich heraus und man erhält wieder die Ausgangsfunktion. Die Taylorentwicklung k-ter Ordnung hat den Ausdruck

   $$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} (\Delta\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\nabla})^i f(\mathbf{x}_0) + R_k(|\Delta\mathbf{x}|).$$

3. Schreiben Sie die Taylorentwicklung 2. Ordnung der Funktion (b) der ersten Aufgabe um die Anfangspunkte $(x_0, y_0) = (1, -1)$ bzw. $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Wenn Sie einen Rechner haben, plotten Sie die Funktion und ihre beiden Näherungen.

4. *(Klausuraufgabe vom 24.07.2007)* Sei

$$f(x, y) = \sin x^n \cos \frac{y}{3}, \quad (x, y) \in [0, 2\pi] \times [-2\pi, 2\pi].$$

   (a) Berechnen Sie den Gradienten, das totale Differential und die Hesse-Matrix.

   (b) Bestimmen Sie die Extrempunkte im Inneren des Definitionsbereich für den Fall $n = 1$.

5. *(Zachmann-Jüngel 8.7.3)* Berechnen Sie die Extrema der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

   mit der Nebenbedingung

$$g(x, y) = 3x - y - 1 = 0.$$

6. *(Englische Wikipedia, "Lagrange multipliers")* Berechnen Sie die Extrema der Funktion

$$f(x, y) = x^2 y$$

   mit der Nebenbedingung

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 3 = 0.$$

Mehrfachintegrale ohne Variablenwechsel

So wie partielle Ableitungen Teil von Mathematik 1 und Voraussetzung für die Aufgaben des vorherigen Abschnitts sind, sind Mehrfachintegrale ohne Variablenwechsel Teil von Mathematik 1 und Voraussetzung für die Aufgaben des nächsten Abschnitts. Für diejenigen, die noch nicht Mathematik 1 hatten, werden sie hier kurz wiederholt.

7. Berechnen Sie folgende Doppelintegrale:

$$\text{(a)} \int_{-1}^{2} \mathrm{d}x \int_{0}^{1} xy \, \mathrm{d}y, \qquad \text{(b)} \int_{0}^{1} \mathrm{d}x \int_{0}^{1} e^{x+y} \, \mathrm{d}y,$$

$$\text{(c)} \int_{0}^{\pi} \mathrm{d}x \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} xy \, \cos(x + 2y) \, \mathrm{d}y, \qquad \text{(d)} \int_{0}^{2} \mathrm{d}x \int_{0}^{1} \frac{1}{(1 + x + y)^2} \, \mathrm{d}y.$$

8. Berechnen Sie dieses Doppelintegral auf dem Integrationsbereich $\mathbb{A} = [0,1] \times [0,1]$. Obwohl die Reihenfolge der Integration (zuerst nach x oder nach y) keine Rolle für das Ergebnis spielt, ist ein Weg kürzer: welcher?

$$\int_{\mathbb{A}} y^2 e^{xy}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

9. Berechnen Sie folgende Doppelintegrale und zeichnen Sie die Integrationsbereiche auf der xy-Ebene:

$$\text{(a)} \quad \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^1 xy\,\mathrm{d}y, \qquad\qquad \text{(b)} \quad \int_{-1}^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y\,\mathrm{d}y.$$

10. Stellen Sie fest, dass diese Doppelintegrale die selben Ergebnisse wie in der vorherigen Aufgabe liefern. Warum? Welche Integrale sind einfacher?

$$\text{(a)} \quad \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{y}} xy\,\mathrm{d}x, \qquad\qquad \text{(b)} \quad \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x^2 y\,\mathrm{d}x.$$

Hinweis: zeichnen und vergleichen Sie die Integrationsbereiche auf der xy-Ebene.

Mehrfachintegrale mit Variablenwechsel

11. Berechnen Sie die Jacobi- bzw. Funktionaldeterminante der Abbildung $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) = \mathbf{f}(\rho, \theta, \phi) = (\rho \sin\theta \cos\phi, \rho \sin\theta \sin\phi, \rho\cos\theta),$$

die den Wechsel von kartesischen Koordinaten nach Polarkoordinaten bei dreidimensionalen Bereichsintegralen erlaubt.

12. *(Klausuraufgabe vom 13.02.2007)* Berechnen Sie das Doppelintegral

$$\int_{\bar{\mathbb{A}}} u^2\, dudv,$$

$$\bar{\mathbb{A}} = \mathbf{g}(\mathbb{A}), \quad \mathbb{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < \pi\}, \quad \mathbf{g}(x,y) = (e^x \cos y,\ e^x \sin y).$$

13. *(Klausuraufgabe vom 24.07.2007)* Berechnen Sie das Doppelintegral

$$\int_{\mathbb{A}} e^{\frac{x-y}{x+y}}\, dxdy, \quad \mathbb{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 - x\},$$

mit der Koordinatentransformation $(u,v) = (x-y, x+y)$. Skizzieren Sie die Integrationsbereiche $\mathbb{A}$ in der $(x,y)-$Ebene und $\bar{\mathbb{A}}$ in der $(u,v)-$Ebene. *Hinweis um $\bar{\mathbb{A}}$ zu finden: Führen Sie die Ecken von $\mathbb{A}$ über und verbinden Sie sie mit Geraden.*