Übungsblatt 5 (Diskussion am 27.6.2007)
"Mathematik II für Studierende der Chemie", SS 2007

Prof. Dr. Guido Germano

1. Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme (die ersten beiden stammen aus Papula, Band 1, S. 41, Aufgaben 1a und 1c)

$$(1)\qquad \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 8 & 10 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$(2)\qquad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -4 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$(3)\qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Verifizieren Sie vorher, daß die Koeffizientenmatrix regulär ist, und das System somit eindeutig lösbar ist. Benutzen Sie anschließend als Lösungsverfahren

(a) die Cramersche Regel

(b) die Gaußsche Elimination mit Rücksubstitution

(c) die Gauß-Jordan-Elimination

(d) die Inversion der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$; bestimmen Sie dabei die Inverse mit

   i. der transponierten Matrix der algebraischen Kofaktoren geteilt durch det $\mathbf{A}$

   ii. der Gauß-Jordan-Elimination.

Benutzen Sie partielles Pivoting, d.h. ordnen Sie bei jedem Schritt die Zeilen so um, dass das Element mit dem größten Betrag auf der Kreuzung zwischen Hauptdiagonale und Arbeitszeile liegt (Pivot). Pivoting dient zur Unterdrückung der Fortpflanzung von Rundungsfehlern, weil beim nächsten Schritt die Arbeitszeile durch den Pivot geteilt wird, und ist deshalb bei kleinen Gleichungssystemen wie diesen, die per Hand mit Bruchrechnung gelöst werden, überflüssig. Zweck der Verwendung des Verfahrens ist also lediglich, damit vertraut zu werden.

2. Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme (aus Papula):

$$(1)\qquad \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 11 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(2)\qquad \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -9 \\ -6 & 6 & -9 & 15 \\ 9 & 9 & 6 & -42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -21 \\ 18 \end{pmatrix}$$

3. Wann hat das folgende lineare Gleichungssystem (Papula) in Abhängigkeit vom Wert des Parameters a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -a & 1 & 2 \\ -2 & 2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   (a) keine Lösung,
   (b) eine eindeutige Lösung,
   (c) unendlich viele Lösungen?

4. Welche der folgenden Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ sind linear und warum? Stellen Sie die linearen Funktionen mit Hilfe einer Matrize dar.

   (a) $\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ x + y \end{pmatrix}$

   (b) $\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y - 3 \\ 3x + 2z \\ z \end{pmatrix}$

   (c) $\mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$

   (d) $\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x - 3y + 4z \\ y - 2z \end{pmatrix}$

5. Bestimmen Sie die Fixpunkte der linearen Abbildung $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, d.h. die Punkte, für die $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, mit (Papula)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ergebnisse

1. (1) $x = 3,\ y = -1,\ z = -4$
   (2) $x = 1,\ y = -3,\ z = 4$
   (3) $x = 3/4,\ y = 8/3,\ z = -19/12$