

# Übungsblatt 3 (Korrektur am 20.12.2006)

## Mathematik I für Studierende der Chemie

### WS 2006–07

*Prof. Dr. Guido Germano*

1. Leiten Sie die Formel von De Moivre

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

mit Hilfe der Euler-Gleichung

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

her und benutzen Sie sie zusammen mit dem Binomialsatz

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

um für  $n = 2, 3, 4$  die trigonometrischen Formeln für Winkelvielfache  $\sin n\alpha$  und  $\cos n\alpha$  als Funktion von  $\sin \alpha$  und  $\cos \alpha$  zu erhalten.

2. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß  $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

3. Beweisen Sie die zwei Formen der Bernoullischen Ungleichung

$$(a) \quad (1 + a)^n \geq 1 + na, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > -1$$

$$(b) \quad (1 + a)^n > 1 + na, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > -1, \quad a \neq 0.$$

*Hinweis: benutzen Sie vollständige Induktion oder den Binomialsatz.*

4. Finden Sie, ab welchem  $n$  die Folge

$$a_n = \frac{5n}{n^2 + 9}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

streng monoton fallend ist, und zeigen Sie, daß die Folge beschränkt ist. Finden Sie den Grenzwert für  $n \rightarrow +\infty$ .

*Hinweis: Um die Monotonie zu zeigen, lösen Sie die Ungleichung  $a_n > a_{n+1}$ .*

5. Zeigen Sie, daß die Folge

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = 2\sqrt{a_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

streng monoton steigend und beschränkt ist.

*Hinweis: Zeigen Sie, daß  $a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow a_n$  ist beschränkt; die Beschränktheit folgt aus vollständiger Induktion.*

6. Zeigen Sie, daß die Folge

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{a_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

streng monoton steigend und nicht beschränkt ist.

*Hinweis: Um die Monotonie zu zeigen, lösen Sie die Ungleichung  $a_n < a_{n+1}$ ; die Unbeschränktheit folgt aus vollständiger Induktion.*

7. Zeigen Sie, daß die Folge

$$a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

streng monoton fallend und beschränkt ist.

*Hinweis: Um die Monotonie zu zeigen, lösen Sie die Ungleichung  $a_n > a_{n+1}$ .*

8. Berechnen Sie die Grenzwerte

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n + n^2}{\sqrt{n^6 + n^5} - \sqrt{n^6 - n^5}}$

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})\sqrt{n}$

(d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n} \sin n!$

(e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n^2 \sin(1/n)}{n^2 + 1}$

(f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n+4} - \sqrt[3]{n}$

## Ergebnisse

8. (a)  $0^+$   
(b)  $1$   
(c)  $1$   
(d)  $0$   
(e)  $+\infty$   
(f)  $0^+$