Lösungen Übungsblatt 7, zum 13.06.2006

1.

$YX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$XY = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ => $YX = XY = E$

$\Lambda = YAX = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ => ist diagonal

$\det(A) = -5$

$\det(\Lambda) = -5$ => $\det(A) = \det(\Lambda)$

$tr(A) = 4$

$tr(\Lambda) = 4$ => $tr(A) = tr(\Lambda)$

2.

a)

$oo^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$o^To = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ => $oo^T = o^To = E$

b)

$\Lambda = o^TAo = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ => ist diagonal

3.

zu 1)

$\det(A-\lambda E) = -5 - 4\lambda + \lambda^2 == 0$

$=> \begin{pmatrix} \lambda \to -1 \\ \lambda \to 5 \end{pmatrix}$

zu 2.b)

$\det(A-\lambda E) = -6 + \lambda + \lambda^2 == 0$

$=> \begin{pmatrix} \lambda \to -3 \\ \lambda \to 2 \end{pmatrix}$

4.

zu 1)

$-5E-4A+A^2 = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

zu 2.b)

$-6E+A+A^2 = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

5.

zu A1)

$A1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq A1^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ => nicht symmetrisch

$A1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq -A1^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ => nicht schiefsymmetrisch

$A1A1^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ => nicht orthogonal

orthogonalisierbar durch geeigneten Faktor?:

$\alpha A1\alpha A1^T = \begin{pmatrix} 2\alpha^2 & 0 \\ 0 & 2\alpha^2 \end{pmatrix}$ == E => $\begin{pmatrix} \alpha \to -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \alpha \to \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

zu A2)

$A2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq A2^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ => nicht symmetrisch

$A2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -A2^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ => ist schiefsymmetrisch

$A2A2^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ => ist orthogonal

zu A3)

$A3 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} = A3^T = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ => ist symmetrisch

$A3 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \neq -A3^T = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ => nicht schiefsymmetrisch

$A3A3^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ => nicht orthogonal

orthogonalisierbar durch geeigneten Faktor?:

$\alpha A3\alpha A3^T = \begin{pmatrix} 4\alpha^2 & 0 \\ 0 & 4\alpha^2 \end{pmatrix}$ == E => $\begin{pmatrix} \alpha \to -\frac{1}{2} \\ \alpha \to \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

zu A4)

$A4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \neq A4^T = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ => nicht symmetrisch

$A4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \neq -A4^T = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ => nicht schiefsymmetrisch

$A4A4^T = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -7 & 13 \end{pmatrix}$ => nicht orthogonal

orthogonalisierbar durch geeigneten Faktor?:

$\alpha A4\alpha A4^T = \begin{pmatrix} 5\alpha^2 & -7\alpha^2 \\ -7\alpha^2 & 13\alpha^2 \end{pmatrix}$ == E =>{}

6.

$a^+.b = 8 + 8 i = (b^+.a)^* = 8 + 8 i$

$||a|| = \sqrt{a^+ a} = 4$

$||b|| = \sqrt{b^+ b} = \sqrt{31}$

7.

zu A1)

$A1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \neq A1^+ = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ => nicht hermitesch

$A1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \neq -A1^+ = \begin{pmatrix} -1 & -i \\ -1 & i \end{pmatrix}$ => nicht schiefhermitesch

$A1A1^+ = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ => nicht unitär

orthogonalisierbar durch geeigneten Faktor?:

$\alpha A1\alpha A1^+ = \begin{pmatrix} 2\alpha^2 & 0 \\ 0 & 2\alpha^2 \end{pmatrix} == E => \begin{pmatrix} \alpha \to -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \alpha \to \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

zu A2)

$A2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = A2^+ = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ => ist hermitesch

$A2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \neq -A2^+ = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ => nicht schiefhermitesch

$A2A2^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ => ist unitär

zu A3)

$A3 = \begin{pmatrix} i & i \\ i & -i \end{pmatrix} \neq A3^+ = \begin{pmatrix} -i & -i \\ -i & i \end{pmatrix}$ => nicht hermitesch

$A3 = \begin{pmatrix} i & i \\ i & -i \end{pmatrix} = -A3^+ = \begin{pmatrix} i & i \\ i & -i \end{pmatrix}$ => ist schiefhermitesch

$A3A3^+ = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ => nicht unitär

orthogonalisierbar durch geeigneten Faktor?:

$\alpha A3\alpha A3^+ = \begin{pmatrix} 2\alpha^2 & 0 \\ 0 & 2\alpha^2 \end{pmatrix} == E => \begin{pmatrix} \alpha \to -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \alpha \to \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

zu A4)

$A4 = \begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1+i & 5i \end{pmatrix} \neq A4^+ = \begin{pmatrix} -i & -1-i \\ 1-i & -5i \end{pmatrix}$ => nicht hermitesch

$A4 = \begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1+i & 5i \end{pmatrix} = -A4^+ = \begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1+i & 5i \end{pmatrix}$ => ist schiefhermitesch

$A4A4^+ = \begin{pmatrix} 3 & 6-6i \\ 6+6i & 27 \end{pmatrix}$ => nicht unitär

orthogonalisierbar durch geeigneten Faktor?:

$\alpha A4\alpha A4^+ = \begin{pmatrix} 3\alpha^2 & (6-6i)\alpha^2 \\ (6+6i)\alpha^2 & 27\alpha^2 \end{pmatrix} == E =>\{\}$

Finde Eigenwerte der Matrix A2:

det(A2-λE) = 0 => λ1/2 = {-1, 1}

Bestimme die zugehörigen Eigenvektoren:

(A2-λ1E).$\bar{x}$ = 0 => $\bar{x}$1 = $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

(A2-λ2E).$\bar{x}$ = 0 => $\bar{x}$2 = $\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$

Bilde Matrix der normierten Eigenwerte (in Spalten):

Me = $\begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Me ist unitär:

MeMe$^+$ = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Me ist die gesuchte unitäre Matrix U:

Λ = Me$^+$A2Me = $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$