

Übungsblatt 9 (Diskussion am 4.7.2006) zu “Mathematik II für Studierende der Chemie”, SS 2006

Prof. Dr. Guido Germano

1. In Aufgabe 8.5 wurden 2 und 1 als Eigenwerte der Matrix

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ermittelt, und ferner, daß die Eigenvektoren des Eigenwerts 2 gleiche Komponenten haben, also entlang der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten liegen, während die Eigenvektoren des Eigenwerts 1 entgegengesetzte Komponenten haben, also entlang der Winkelhalbierenden des 2. und 4. Quadranten liegen.

(a) Stellen Sie fest, daß die Nummerierung der Eigenwert-/Eigenvektorenpaare willkürlich ist, solange die Paarkomponenten den selben Index erhalten, daß also $\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{\Lambda}\mathbf{X}^T$, egal ob in

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 2, \hat{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 1, \hat{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

oder

$$\lambda_1 = 1, \hat{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 2, \hat{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Ebenso kann man jeden normierten Eigenvektor $\hat{\mathbf{x}}_i$ mit -1 multiplizieren und \mathbf{X} bleibt orthogonal. Multipliziert man allerdings einen normierten Eigenvektor mit $a \neq 0, a \neq \pm 1$, ist \mathbf{X} nicht mehr orthogonal und $\mathbf{X}^{-1} \neq \mathbf{X}^T$. Stellen Sie fest, daß $\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{\Lambda}\mathbf{X}^{-1}$ mit

$$\lambda_1 = 1, \hat{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 2, \hat{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Berechnen Sie die quadratischen Formen

$$f(x, y) = (x \ y) \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad g(x, y, z) = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

3. Sei

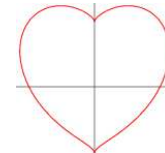
$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4xz.$$

(a) Es handelt sich um eine quadratische Form $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ mit $\mathbf{x}^T = (x, y, z)$. Finden Sie die Formenmatrix \mathbf{A} . Ist \mathbf{A} definit?

- (b) Finden Sie den kritischen Punkt von $f(x, y, z)$ und ermitteln Sie, ob es sich dabei um ein Maximum, ein Minimum oder einen Sattelpunkt handelt.
- (c) Erklären Sie mit einer Analogie zum eindimensionalen Fall, warum der Gradient und die Hesse-Matrix von $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ respektive $2\mathbf{A}\mathbf{x}$ und $2\mathbf{A}$ sind.
- (d) Was passiert, wenn der Koeffizient des gemischten Terms xz 1 bzw. 2 wird?
4. Zeigen Sie, warum eine quadratische Form $y = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, deren Formenmatrix \mathbf{A} nur positive bzw. negative Eigenwerte hat, nur positive bzw. negative Werte y für jedes beliebige $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ annehmen kann (und daher positiv bzw. negativ definit heißt).
Hinweis: Setzen Sie $\mathbf{A} = \mathbf{O} \mathbf{\Lambda} \mathbf{O}^T$ ein und betrachten Sie die äquivalente quadratische Form $\bar{y} = \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{\Lambda} \bar{\mathbf{x}}$ mit $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{O}^T \mathbf{x}$.

5. Die Punkte, die der Gleichung

$$(x^2 + y^2 - 1)^3 - x^2 y^3 = 0$$



genügen, bilden eine herzförmige Kurve (rechts).

- (a) Ist die Darstellung mit dieser Gleichung explizit, implizit, parametrisch oder keine der genannten?
- (b) Finden Sie die Schnittpunkte der Kurve mit den Koordinatenachsen.
- (c) Lösen Sie y als Funktionen von x auf. Warum reicht nicht eine einzige Funktion? Wo sind die Nahtstellen dieser Funktionen?
- (d) Finden Sie die Ableitungen in den Punkten $(1,0)$ und $(1,1)$. Schreiben Sie die Gleichungen der Tangenten in diesen Punkten.
- (e) Finden Sie die Ableitung in $(1,1)$ ohne die Gleichung aufzulösen (Satz von Dini). Welcher Schwierigkeit begegnet dieses Verfahren im Punkt $(1,0)$?

(Klausuraufgabe vom 26.7.2004)

6. Berechnen Sie den thermischen Ausdehnungskoeffizienten

$$\alpha = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{\partial \ln v}{\partial T} \right)_p$$

für ein Gas unter Verwendung der Zustandsgleichung von Van der Waals ($v = V/n$)

$$\left(p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = RT.$$

- (a) Warum ist es schwierig, v als explizite Funktion von p und T aufzulösen?
- (b) Berechnen Sie α mit dem Satz von Dini zur Ableitung von impliziten Funktionen.
- (c) Berechnen Sie α mit der Formel

$$\alpha = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_p^{-1}.$$

(Klausuraufgabe vom 18.7.2005)

7. Berechnen Sie die Arbeit der folgenden Vektorfelder

(a) $\mathbf{f}(x, y) = (x^2y, 2xy^2),$

(b) $\mathbf{g}(x, y) = \left(\frac{5-2x}{x^2-5x+6}, \frac{2y}{y^2-1} \right)$

entlang der Geraden, die die Punkte (0,2) und (1,3) verbindet. Sind die Vektorfelder konservativ?

(Klausuraufgabe vom 18.7.2005)