Übungsblatt 1 (Diskussion am 29.4.2006) zu "Mathematik II für Studierende der Chemie", SS 2006

Prof. Dr. Guido Germano

1. Berechnen Sie für die Vektoren $\mathbf{a} = (1,\ 3,\ 2)$ und $\mathbf{b} = (3,\ 5,\ 4)$:
   (a) die Normen $a = \|\mathbf{a}\|, b = \|\mathbf{b}\|$;
   (b) die Entfernung $c = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$ zwischen den Punkten auf der Spitze der Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$;
   (c) die $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ entsprechenden Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}/a,\ \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b}/b$;
   (d) das Skalar- bzw. innere Produkt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$;
   (e) $\cos\theta,\ \sin\theta$ und θ, wobei θ der Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ist.

   Benutzen Sie die Euklidische Metrik. Bei (a) und (b) benutzen Sie zusätzlich die Manhattan- und die Maximummetrik.

2. Seien a, b, c die Seitenlängen eines Dreiecks und θ der Winkel gegenüber c. Beweisen Sie, daß der Cosinussatz von Carnot
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$
   aus dem Pythagorassatz und der Definition $\cos\theta =$ Ankathete/Gegenkathete folgt.

   Zur Erinnerung: Der Cosinussatz von Carnot verallgemeinert den Satz des Pythagoras (bei dem $\theta = \pi/2 \Rightarrow \cos\theta = 0$) auf schiefwinklige Dreiecke und wird benutzt, um den von zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ aufgespannten Winkel θ in Zusammenhang mit dem Skalarprodukt $\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}}$ zu bringen: wenn man das Ergebnis von $c^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$ mit der Aussage des Cosinussatzes vergleicht, erhält man $\cos\theta = \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}}$.

   Hinweis: Schlagen Sie in Ihrem Schulbuch unter Dreiecksgeometrie nach oder suchen sie "Cosinussatz" und "Beweis" im Internet.

3. Zeigen Sie, daß die Ungleichung von Cauchy-Schwarz
$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \le \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|$$
   mit $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ eine Folge dieser Eigenschaft ist:
$$\|\hat{\mathbf{a}} \pm \hat{\mathbf{b}}\|^2 \ge 0.$$
   Zur Erinnerung: Die Ungleichung von Cauchy-Schwarz gewährleistet die Sinnvolligkeit des Ausdrucks für den Winkel θ zwischen zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{a}, \mathbf{b} \ne \mathbf{0}$:
$$\cos\theta = \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}}.$$

4. Zeigen Sie, daß die Trivialmetrik
$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \ne y \end{cases}$$
   nicht von einer Norm hergeleitet werden kann, d.h. daß $d(x, 0)$ nicht alle Eigenschaften einer Norm erfüllt. Wie sieht in $\mathbb{R}^2$ eine ϵ-Umgebung vom Ursprung aus, wenn man die Trivialmetrik benutzt?